Asignatura: Matemática

Curso: 402 **apunte correspondientea: abril y mayo 2021**

Docente: ***Caiola, Rosa*** ***402*** ***siemprecinco2005@hotmail.com***

Historia: *Sistemas de* **ecuaciones** *lineales.*

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En notación, sería:

$y + 4x = 28$

$y + x = 10$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir: $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos. Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

Sistema de ecuaciones lineales 2x2

EJEMPLO DE RESOLUCIÓN por determinantes:

Supongamos que tenemos que resolver la siguiente ecuación, donde nos piden encontrar los valores de X e Y que cumplen con esas condiciones.

$$\begin{cases} 5X - 2Y = \ -2 \\ -3X + 7Y = \ -22 \end{cases}$$

Para resolverlo utilizando el método de determinantes, tenemos que siempre resolver los siguientes cálculos, para todos los sistemas de ecuaciones independientemente de sus valores, las resolución es siempre la misma y hay que plantear lo siguiente.

$$\begin{cases} X = \dfrac{\Delta X}{\Delta S} \\ Y = \dfrac{\Delta Y}{\Delta S} \end{cases}$$

$\Delta X \longrightarrow$ Determinante de X

$\Delta S \longrightarrow$ Determinante de Sistema

$\Delta Y \longrightarrow$ Determinante de Y

Pero, ¿como calculo los determinantes de X,Y y el del sistema? muy simple, de la siguiente manera.

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 5 * 3 - (-3 * -2) = \boxed{29}$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -22 & 7 \end{vmatrix} = -2 * 7 - (-22 * -2) = \boxed{-58}$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -22 \end{vmatrix} = 5 * (-22) - (-3 * -2) = \boxed{-116}$$

- Para Calcular el **determinante del sistema ΔS**, Armamos el determinante solo con los valores que estan multiplicando a la **X** y la **Y.** Es por eso que nos queda la estructura que vimos arriba, luego multiplicamos cruzados, y restamos los múltiplos.
- Para Calcular el **determinante de X ΔX** lo que tenemos que hacer es armarnos el determinante con los valores que están a la derecha del signo igual, y con los valores que están multiplicando a la Y. De esta forma obtenemos el determinante que vimos arriba. luego la operatoria es la misma, multiplicamos cruzado y restamos las multiplicaciones.
- Para Calcular el **determinante de Y ΔY** lo que tenemos que hacer es armarnos el determinante con los valores que están a la derecha del signo igual, y con los valores que están multiplicando a la X. De esta forma obtenemos el determinante que vimos arriba. Luego la operatoria es la misma, multiplicamos cruzado y restamos las multiplicaciones.

Ahora que ya tenemos los valores de los determinantes, lo que sigue es encontrar los valores correspondientes a X e Y, y de esa forma resolvemos la ecuación. Para eso debemos hacer uso de las formulas que están en la segunda imagen.

Es decir que para calcular el valor de X tenemos que dividir el determinante de X con el Determinante del sistema y para encontrar el valor de Y tenemos que dividir el determinante de Y con el determinante del sistema.

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta S} = -\frac{58}{29} = \boxed{-2}$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta S} = -\frac{-116}{29} = \boxed{-4}$$

Ejercicios:

1) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Sistema Lineal 3x3

Se llama **ecuación lineal** con tres incógnitas a la suma de las tres incógnitas, multiplicadas por números, e igualada la suma a otro número (las incógnitas no pueden estar elevadas a exponentes ni multiplicadas entre sí)

Se llama **solución de la ecuación lineal** a un conjunto de valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen que se verifique la igualdad.

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de ecuaciones lineales referidas todas ellas a las mismas incógnitas. Un sistema 3x3 significa 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

La **solución de un sistema de ecuaciones lineales** es el conjunto de valores que verifican todas y cada una de las ecuaciones.

Regla de Cramer:

Ejemplo:
Resolver el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

+ 3	x_1	- 6	x_2	+ 9	x_3	=	+ 18
+ 2	x_1	- 4	x_2	+ 5	x_3	=	+ 11

1. Determinante principal (D_P)

	+ 3	- 6	+ 9
D_P =	+ 2	- 4	+ 5

2. Calcular el valor del D_P

	+ 3	- 6	+ 9	+ 3	- 6
D_P =	+ 2	- 4	+ 5	+ 2	- 4
	- 3	- 4	+ 6	- 3	- 4

- Se copian las dos primeras columnas a la derecha del determinante.

	+ 3	- 6	+ 9	+ 3	- 6
D_P =	+ 2	- 4	+ 5	+ 2	- 4
	- 3	- 4	+ 6	- 3	- 4
			- 72	+ 90	- 72

- Se multiplican los elementos del determinante en diagonal.

	+ 3	- 6	+ 9	+ 3	- 6
D_P =	+ 2	- 4	+ 5	+ 2	- 4
	- 3	- 4	+ 6	- 3	- 4
	- 108	+ 60	+ 72		

- Se multiplican los elementos del determinante en diagonal (inverso), y a los resultados se les cambia el signo.

	+ 3	- 6	+ 9	+ 3	- 6
D_P =	+ 2	- 4	+ 5	+ 2	- 4
	- 3	- 4	+ 6	- 3	- 4

- 108	+ 60	+ 72	- 72	+ 90	- 72

D_P = -30

- Se suman los seis resultados anteriores

3. Determinante para x1 (D_{x1})

	+ 18	- 6	+ 9
D_{x1} =	+ 11	- 4	+ 5
	+ 17	- 4	+ 6

- Es como el determinante principal, pero se cambia la primera columna, anotando en lugar de los coeficientes, los términos independientes.

4. Calcular el valor del D_{x1}

	+ 18	- 6	+ 9	+ 18	- 6
D_{x1} =	+ 11	- 4	+ 5	+ 11	- 4
	+ 17	- 4	+ 6	+ 17	- 4

D_{x1} =

- Se multiplican las 6 diagonales (no olvides cambiar los signos en tres de ellas) y se suman los seis resultados anteriores

5. Determinante para x2 (D_{x2})

	+ 3	+ 18	+ 9
D_{x2} =	+ 2	+ 11	+ 5
	- 3	+ 17	+ 6

6. Calcular el valor del D_{x2}

	+ 3	+ 18	+ 9	+ 3	+ 18
D_{x2} =	+ 2	+ 11	+ 5	+ 2	+ 11
	- 3	+ 17	+ 6	- 3	+ 17

7. Determinante para x3 (D_{x3})

	+ 3	- 6	+ 18
D_{x3} =	+ 2	- 4	+ 11
	- 3	- 4	+ 17

- Es como el determinante principal, pero se cambia la tercera columna, anotando en lugar de los coeficientes, los términos independientes.

8. Calcular el valor del D_{x3}

	+ 3	- 6	+ 18	+ 3	- 6
D_{x3} =	+ 2	- 4	+ 11	+ 2	- 4
	- 3	- 4	+ 17	- 3	- 4

D_{x3} =

- Se multiplican las 6 diagonales (no olvides cambiar los signos en tres de ellas) y se suman los seis resultados anteriores

Resultados de los determinantes

	+ 3	- 6	+ 9
D_P =	+ 2	- 4	+ 5
	- 3	- 4	+ 6

D_P = -30

	+ 18	- 6	+ 9
D_{x1} =	+ 11	- 4	+ 5
	+ 17	- 4	+ 6

D_{x1} = +30

	+ 3	+ 18	+ 9
D_{x2} =	+ 2	+ 11	+ 5
	- 3	+ 17	+ 6

D_{x2} = +60

	+ 3	- 6	+ 18
D_{x3} =	+ 2	- 4	+ 11
	- 3	- 4	+ 17

D_{x3} = -30

Valores de las incógnitas

Se obtienen dividiendo cada determinante de x1, x2 y x3 entre el determinante principal:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D_P}$$

$$x_2 = \frac{D_{x2}}{D_P}$$

$$x_3 = \frac{D_{x3}}{D_P}$$

Valores de las incógnitas

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D_P} \qquad x_1 = \frac{30}{-30} \therefore x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{D_{x2}}{D_P} \qquad x_2 = \frac{60}{-30} \therefore x_2 = -2$$

$$x_3 = \frac{D_{x3}}{D_P} \qquad x_3 = \frac{-30}{-30} \therefore x_3 = +1$$

<u>EJERCICIOS:</u>

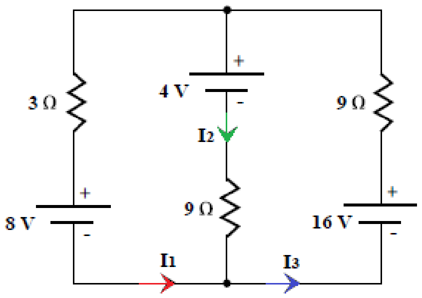
1) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y - 6z = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$

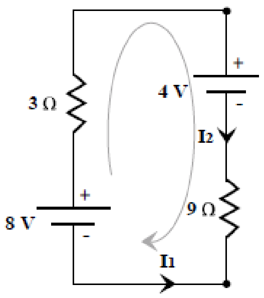
Problemas de mallas eléctricas (aplicación de sistemas de ecuaciones 3x3).

EJERCICIO 1

Supongamos que tenemos una red circuital de la siguiente forma, y nos piden calcular la intensidad de las corrientes por cada rama.

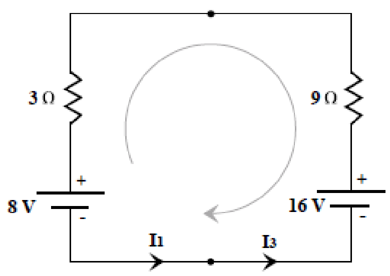


Si planteamos las ecuaciones de nodos y mayas obtenemos las siguientes ecuaciones y los circuitos de cada maya analizada.



$$\boxed{I_1 + I_2 = I_3}$$

$$\boxed{8v + 3I_1 - 4 - 9I_2 = 0}$$



$$\boxed{8v + 3I_1 + 9I_3 - 16 = 0}$$

En base a las ecuaciones obtenidas nos armamos un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas, podemos resolver empleando cualquier método matemático que manejemos, yo solo voy a presentar los resultados finales, dado que no es el objetivo de este articulo hacer foco en la resolución de un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 8v + 3I_1 - 4 - 9I_2 = 0 \\ 8v + 3I_1 + 9I_3 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{4}{15}A \quad I_2 = \frac{8}{15}A \quad I_3 = \frac{12}{15}A}$$

Al resolver el sistema:

Como podemos ver, los signos de las corrientes nos dieron todos de magnitud positiva, eso quiere decir que el sistema de referencia elegido al plantear el problema fue el correcto, si como resultado alguna de las corrientes fuera de signo negativo, quiere decir que la dirección de circulación de esa corriente es en sentido opuesto al elegido por nosotros.

- Resolver el sistema planteado por método de determinantes.